



## Ranah Research : Journal of Multidisciplinary Research and Development

+62 821-7074-3613

[ranahresearch@gmail.com](mailto:ranahresearch@gmail.com)

<https://jurnal.ranahresearch.com/>



### Kontrol Optimal pada Model Penyebaran SARS-CoV-2 dengan Pelaksanaan *Testing* dan Perawatan

Aliza Dame Rohana Sianipar<sup>1</sup>, Lasker Pangarapan Sinaga<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universitas Negeri Medan, Sumatera Utara, Indonesia, [alizasianipar4@gmail.com](mailto:alizasianipar4@gmail.com)

<sup>2</sup>Universitas Negeri Medan, Sumatera Utara, Indonesia, [lazer\\_integral@yahoo.com](mailto:lazer_integral@yahoo.com)

Corresponding Author: [alizasianipar4@gmail.com](mailto:alizasianipar4@gmail.com)<sup>1</sup>

**Abstract:** COVID-19 (Corona Virus Disease 2019) is a disease of the respiratory system caused by severe acute respiratory syndrome coronavirus 2 (SARS-CoV-2). The COVID-19 pandemic was declared active by WHO in March 2020 and the pandemic status was lifted on May 5, 2023. COVID-19 must still be watched out to prevent a new wave of pandemics, so an optimal control analysis is needed. The purpose of this study is to determine the optimal control form of the SARS-CoV-2 spread dynamics model in minimizing the number of exposed populations by implementing testing and minimizing the infected population by implementing treatment. Optimal control analysis is carried out using the Pontryagin Maximum Principle, while numerical calculations for simulation use the Forward-Backward Runge-Kutta method with the help of MATLAB R2021a software. The results of the optimal control analysis conducted on 3 simulations with different vaccination values and incubation periods show that the application of both control strategies to the COVID-19 spread model in Indonesia is effective in reducing the number of infected individuals to 99.9%, but cannot maintain the population size.

**Keyword:** Optimal Control, Forward-Backward Runge Kutta, Pontryagin Maximum Principle, COVID-19

**Abstrak:** COVID-19 (Corona Virus Disease 2019) merupakan penyakit pada sistem pernapasan yang disebabkan oleh *severe acute respiratory syndrome coronavirus 2* (SARS-CoV-2). Pandemi COVID-19 dinyatakan aktif oleh WHO pada Maret 2020 dan status pandemi dicabut pada 5 Mei 2023. COVID-19 tetap harus diwaspadai agar tidak terjadi gelombang pandemi yang baru, sehingga diperlukan analisis kontrol optimal. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui bentuk kontrol optimal terhadap model dinamika penyebaran SARS-CoV-2 dalam meminimumkan jumlah populasi *exposed* dengan pelaksanaan *testing* serta meminimumkan populasi *infected* dengan pelaksanaan perawatan. Analisis kontrol optimal dilakukan dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin, sedangkan perhitungan numerik untuk simulasi menggunakan metode *Forward-Backward* Runge-Kutta dengan bantuan *software* MATLAB R2021a. Hasil analisis kontrol optimal yang dilakukan pada 3

simulasi dengan nilai vaksinasi dan masa inkubasi yang berbeda-beda menunjukkan bahwa penerapan kedua strategi kontrol pada model penyebaran COVID-19 di Indonesia efektif dalam menurunkan jumlah individu yang terinfeksi hingga 99,9%, namun tidak dapat mempertahankan jumlah populasinya.

**Kata Kunci:** Kontrol Optimal, *Forward-Backward* Runge Kutta, Prinsip Maksimum Pontryagin, *COVID-19*

---

## PENDAHULUAN

COVID-19 (*Corona Virus Disease 2019*) merupakan penyakit pada sistem pernapasan yang disebabkan oleh virus corona atau *severe acute respiratory syndrome coronavirus 2* (SARS-CoV-2). Kelompok Studi ICTV Coronaviridae menyatakan bahwa virus ini berkaitan dengan spesies virus corona SARS yang telah ada. Kasus pertama COVID-19 pada manusia terjadi pada Desember 2019 yang terdeteksi di Kota Wuhan, Provinsi Hubei, Tiongkok dan telah menyebar secara global. Pada 11 Maret 2020, wabah akibat SARS-CoV-2 ditetapkan sebagai pandemi oleh Organisasi Kesehatan Dunia (WHO). Pemerintah China melakukan karantina di kota Wuhan pada 23 Januari 2020 untuk mengendalikan pandemi COVID-19 (Hou et al., 2020).

Kasus COVID-19 di Indonesia terkonfirmasi pertama kali pada 2 Maret 2020, dimana dideklarasikan bahwa terdapat 2 orang terinfeksi, 0 sembuh dan 0 kematian (Rustan dan Handayani, 2020). Melansir dari Wikipedia “Pandemi COVID-19 di Indonesia, 2022”, hingga pertengahan bulan Juni 2023 Indonesia telah melaporkan lebih dari 6,8 juta kasus positif dengan 161.830 angka kematian. Namun angka kematian diperkirakan jauh lebih tinggi dibandingkan data yang telah dilaporkan karena ada kematian dengan gejala COVID-19 yang belum dikonfirmasi atau dites (Wikipedia, n.d.).

Dalam upaya menekan lonjakan peningkatan kasus COVID-19 di Indonesia, pemerintah melakukan sejumlah pembatasan kegiatan masyarakat. Pemerintah menerapkan Pembatasan Sosial Berskala Besar (PSBB) yang dilanjutkan dengan Pemberlakuan Pembatasan Kegiatan Masyarakat (PPKM). Seiring berjalan waktu, upaya yang dilakukan pemerintah untuk menghadapi penambahan jumlah kasus terkonfirmasi COVID-19 semakin beragam. Selain perberlakuan pembatasan kegiatan sosial, dilakukan juga vaksinasi kepada seluruh masyarakat Indonesia, melacak kontak yang dilakukan oleh orang yang baru terpapar, melakukan tes COVID-19 kepada orang yang akan melakukan perjalanan maupun orang yang melakukan kontak dengan orang yang terpapar, dan memaksimalkan perawatan kepada orang yang terpapar (Yong et al., 2022).

Penerapan *testing* yaitu suatu langkah untuk mendiagnosa kasus positif COVID-19 yang bergejala ataupun tidak bergejala agar dapat segera ditangani atau dilakukan perawatan. Li dan Guo memperoleh hasil bahwa pelaksanaan deteksi orang yang terpapar membantu dalam mengurangi penyebaran COVID-19 (Li & Guo, 2022). Perawatan adalah upaya memenuhi peralatan dan tenaga medis dalam menangani individu yang terpapar COVID-19. Hasil studi menunjukkan bahwa pelaksanaan perawatan efektif dalam mengurangi tingkat penyebaran COVID-19. Hal ini didukung oleh penelitian yang dilakukan oleh Azzahra (2022) yang melakukan kontrol optimal model SEIR melalui *testing* di Jakarta yang menunjukkan bahwa dengan mengurangi individu *exposed* dan dengan biaya yang minimum (Azzahra et al., 2022).

Para peneliti dari berbagai bidang turut berkontribusi dalam upaya mengatasi pandemi COVID-19. Peneliti di bidang kesehatan berupaya mengetahui sumber penyakit, sifat virus, cara penyebaran penyakit, dan cara mengobatinya. Peneliti di bidang matematika berupaya dalam mempelajari karakteristik wabah pandemi, memprediksi penyebaran virus serta membangun model matematika yang diharapkan mampu meminimalisir penularan penyakit.

Penelitian yang membahas tentang dinamika penyebaran penyakit COVID-19 telah banyak dilakukan Zeb et al. (2020). mengembangkan model SEIQR dengan menambahkan kelas isolasi yang menunjukkan isolasi manusia yang terinfeksi dapat mengurangi resiko penyebaran COVID-19 (Zeb et al., 2020). Penelitian juga dilakukan oleh Youssef et al. (2022). dengan memodifikasi model SEIQR untuk menganalisis penyebaran COVID-19 di Arab Saudi yang menunjukkan melakukan kegiatan dari rumah dan mengisolasi individu yang terinfeksi dapat menurunkan laju peningkatan infeksi (Youssef et al., 2022). Didukung dengan penelitian oleh Gu et al. (2022). yang melakukan studi kasus untuk populasi di Pakistan menggunakan model SEIAQHR penyebaran COVID-19. Penelitian menunjukkan efektivitas melakukan isolasi, melakukan karantina, dan melakukan rawat inap terhadap individu terkonfirmasi positif dapat menekan jumlah individu terinfeksi (Gu et al., 2022).

Analisis model dinamika penyebaran penyakit COVID-19 juga dilakukan oleh Annas et al. (2020). Model yang dibahas dalam penelitian ini membagi populasi manusia saat  $t$  menjadi 4 subpopulasi, yaitu individu yang sehat tetapi rentan terinfeksi (*susceptible*), individu yang berada dalam masa inkubasi (*exposed*), individu yang terkonfirmasi terinfeksi (*infected*), dan individu yang telah sembuh (*recovered*) dengan mempertimbangkan parameter vaksinasi dan isolasi. Populasi individu pada kelompok *susceptible* akan bertambah dengan adanya kelahiran alami. Individu pada kelompok *susceptible* akan berkurang karena terdapat kematian alami, perpindahan individu dari *susceptible* ke *exposed* karena melakukan kontak dengan individu *infected* dan perpindahan individu dari *susceptible* ke *recovered* karena melakukan vaksinasi.

Pertambahan individu pada kelompok *exposed* dapat terjadi jika terdapat kontak antara individu rentan dan individu terinfeksi. Individu pada kelompok *exposed* akan berkurang dengan adanya kematian alami dan perpindahan individu *exposed* ke *infected* yang dikonfirmasi terinfeksi COVID-19. Individu pada kelompok *infected* akan bertambah jika terdapat individu *exposed* yang dikonfirmasi positif COVID-19 dan pindah ke *infected*. Populasi individu pada kelompok *infected* akan berkurang karena adanya kematian alami, kematian karena COVID-19 dan individu yang dinyatakan sembuh masuk ke kelompok *recovered*. Pertambahan pada kelompok *recovered* terjadi dengan adanya individu pada kelompok *susceptible* yang melakukan vaksinasi dan terdapat individu terinfeksi yang dinyatakan sembuh. Populasi pada kelompok *recovered* akan berkurang dengan adanya kematian alami.

Penelitian yang dilakukan oleh Annas et al. (2020). dilakukan dengan simulasi nilai vaksinasi dan isolasi yang berbeda. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa vaksinasi dan isolasi sangat berpengaruh terhadap jumlah individu yang terinfeksi sehingga perlu diterapkan pada populasi *susceptible*.

Hasil penelitian-penelitian yang telah dijelaskan menunjukkan bahwa pemodelan matematika serta kontrol optimal merupakan alat yang tepat untuk menganalisis dinamika serta pengendalian penyebaran COVID-19. Kontrol optimal umumnya menunjukkan bahwa strategi vaksinasi, karantina, dan pengobatan merupakan strategi-strategi yang dibutuhkan dalam pengendalian penyakit menular. Asumsi bahwa pengontrolan dengan penggunaan strategi ini dapat mempengaruhi kemampuan virus dalam menginfeksi merupakan dasar penggunaan metode kontrol optimal.

Kontrol optimal pada beberapa kelas individu dari model yang dibangun terbukti bermanfaat dalam meminimalisir penyebaran suatu penyakit. Hal tersebut dinyatakan dalam beberapa penelitian yang membahas dinamika penyebaran penyakit terutama COVID-19. Rangkuti, dkk. melakukan analisis kontrol optimal pada penyakit COVID-19 dengan model SEIR dimana hasil analisis menunjukkan bahwa penambahan kontrol pada model dapat meminimumkan jumlah individu terinfeksi yang bergejala dan tidak bergejala (Rangkuti et al., 2022). Araz mengkonstruksi model SIRU penyebaran COVID-19 dengan menerapkan strategi kontrol *lockdown*, karantina, dan isolasi mandiri. Simulasi yang dilakukan menunjukkan

pengaruh positif dalam meminimalkan peningkatan jumlah terinfeksi (İğret Araz, 2021). Penelitian juga dilakukan oleh Paul dan Kuddus yang menunjukkan program vaksin dosis penuh secara signifikan dapat mengurangi kasus ringan dan kasus kritis terinfeksi COVID-19 dan berpotensi untuk membasmi virus (Paul & Kuddus, 2022).

Pada 5 Mei 2023 WHO secara resmi mencabut status darurat kesehatan COVID-19. Keputusan ini diambil karena WHO menilai masa krisis yang disebabkan COVID-19 telah dilalui dan telah berdampak besar pada perubahan perekonomian dunia. Meskipun demikian, COVID-19 tidak dinyatakan hilang dan masih dilakukan berbagai macam upaya penanganan untuk mengantisipasi situasi di masa depan (WHO, 2023). Melalui Kompas pada 8 Agustus 2023, kemunculan varian COVID-19 Eris di Indonesia membuat pihak pemerintah tetap meminta masyarakat untuk waspada terhadap COVID-19 (Kompas, 2023). Pemerintah juga mewaspada varian baru HV.1 dan JN.1 yang telah terdeteksi di sejumlah negara di Inggris, seluruh Eropa dan Amerika Serikat. Terlepas dari pro dan kontra masyarakat terkait pelaksanaan vaksin yang menganggap vaksinasi bukan suatu kewajiban dan mempertanyakan efektivitas vaksin, tetapi hingga saat ini pemerintah masih menganjurkan masyarakat untuk divaksin sebagai proteksi terhadap penyebaran COVID-19.

Kemunculan varian terbaru virus COVID-19 tidak dapat diprediksi yang mengakibatkan perlunya tindakan antisipasi untuk menghadapi keadaan ini. Analisis kontrol optimal dapat menjadi solusi untuk melihat dinamika virus jika terjadi penambahan strategi kontrol pada model matematika penyebaran COVID-19 sehingga dapat meminimalkan populasi yang akan terinfeksi sekaligus mengurangi biaya dalam penanganan COVID-19. Oleh karena itu, akan dilakukan penelitian kontrol optimal terhadap model yang diusulkan Annas, dkk. dengan judul “Kontrol Optimal pada Model Penyebaran SARS-CoV-2 dengan Pelaksanaan Testing dan Perawatan di Indonesia”.

## Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana bentuk kontrol optimal terhadap model dinamika penyebaran SARS-CoV-2 dalam meminimumkan jumlah populasi *exposed* dengan pelaksanaan *testing* serta meminimumkan populasi *infected* dengan pelaksanaan perawatan.

## METODE

Penelitian ini dilakukan di Perpustakaan Universitas Negeri Medan yang merupakan studi kepustakaan (*library research*) yaitu proses menelusuri dan menelaah literatur-literatur yang memiliki relevansi dengan topik pembahasan. Informasi dalam penelitian ini berasal dari buku referensi, jurnal, dan dokumen-dokumen lain yang berkaitan dengan topik pembahasan. Jurnal utama yang digunakan adalah hasil penelitian dari Annas, dkk pada tahun 2020 yang meneliti model SEIR penyebaran COVID-19. Adapun prosedur penelitian yang dilakukan yaitu mengkaji model dinamika penyebaran SARS-CoV-2 dari penelitian yang dilakukan oleh Annas et al. (2020). pada tahun 2020 dengan judul “*Stability Analysis and Numerical Simulation of SEIR Model for Pandemic COVID-19 Spread in Indonesia*”.

Mengkonstruksi model SEIR dinamika penyebaran SARS-CoV-2 merupakan prosedur selanjutnya dengan penambahan strategi kontrol berupa pelaksanaan testing dan perawatan. Selanjutnya, menentukan fungsi objektif dan fungsi kendala pada kontrol optimal model SEIR dinamika penyebaran SARS-CoV-2. Setelah ditentukan, maka dilakukan pembentukan fungsi Hamiltonian berdasarkan fungsi objektif dan fungsi kendala yang telah ditentukan pada tahap sebelumnya.

Perlu dilakukan Penyelesaian masalah kontrol optimal menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin dengan langkah-langkah menentukan persamaan *state*, persamaan *costat*, dan memenuhi kondisi transversalitas. Selanjutnya perlu melakukan simulasi numerik kontrol optimal model SEIR dinamika penyebaran SARS-CoV-2 menggunakan metode

*Forward-Backward Sweep* Runge-Kutta pada dengan menggunakan software MATLAB dan melakukan analisis terhadap hasil simulasi dan melakukan pembahasan sehingga dapat dilakukan penarikan kesimpulan.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### Model Penyebaran COVID-19 tanpa Kontrol

Model Annas et al. (2020) membagi populasi manusia pada saat menjadi 4 subpopulasi, yaitu individu yang sehat tetapi rentan terinfeksi (*susceptible*), individu yang berada dalam masa inkubasi (*exposed*), individu yang terkonfirmasi terinfeksi (*infected*), dan individu yang telah sembuh (*recovered*) dengan mempertimbangkan parameter vaksinasi dan isolasi. Misalkan  $s = \frac{S}{N}$ ,  $e = \frac{E}{N}$ ,  $i = \frac{I}{N}$  dan  $r = \frac{R}{N}$ , maka model penyebaran penyakit COVID-19 adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \mu - (\alpha i + \mu + v)s \\ \frac{de}{dt} &= \alpha is - (\beta + \mu)e \\ \frac{di}{dt} &= \beta e - (\mu_{in} + \delta + \mu)i \\ \frac{dr}{dt} &= \delta i + vs - \mu r \end{aligned} \tag{1}$$

#### Keterangan:

- $\mu$  : laju tingkat kelahiran/kematian alami
- $\mu_{in}$  : laju tingkat kematian karena terinfeksi COVID-19
- $\alpha$  : laju tingkat perpindahan individu dari kelas  $s$  ke kelas  $e$
- $\beta$  : laju tingkat perpindahan individu dari kelas  $e$  ke kelas  $i$
- $\delta$  : laju tingkat perpindahan individu dari kelas  $i$  ke kelas  $r$
- $v$  : nilai parameter vaksinasi terhadap kelas *susceptible*

Semua parameter diasumsikan bernilai positif atau lebih besar dari nol.

Titik kritis model matematika penyebaran COVID-19 telah ditemukan oleh Annas et al. (2020) yaitu titik kritis bebas penyakit  $E_0 = (s^*, e^*, i^*, r^*) = (\frac{\mu}{\mu+v}, 0, 0, \frac{v}{\mu+v})$  dan titik kritis endemik penyakit yaitu  $E_1 = (s^*, e^*, i^*, r^*)$  dengan:

$$\begin{aligned} s^* &= \frac{(\mu_{in} + \delta + \mu)(\beta + \mu)}{\alpha\beta} \\ e^* &= \frac{\alpha\beta\mu - (\mu + v)(\mu_{in} + \delta + \mu)(\beta + \mu)}{\alpha\beta(\beta + \mu)} \\ i^* &= \frac{\alpha\beta\mu - (\mu + v)(\mu_{in} + \delta + \mu)(\beta + \mu)}{\alpha(\mu_{in} + \delta + \mu)(\beta + \mu)} \\ r^* &= \frac{\delta\alpha\beta^2\mu - \beta(\mu_{in} + \delta + \mu)(\mu + v)(\beta + \mu) - v((\mu_{in} + \delta + \mu)(\beta + \mu))^2}{\beta\alpha^2(\mu_{in} + \delta + \mu)(\beta + \mu)} \end{aligned}$$

### Model Penyebaran COVID-19 dengan Kontrol

Tujuan masalah kontrol optimal ini adalah untuk meminimumkan populasi individu *exposed* dan *infected*. Azzahra, dkk. telah meneliti bahwa pelaksanaan *testing* dapat menekan laju penyebaran COVID-19 di Jakarta (Azzahra et al., 2022). Nainggolan, dkk. telah meneliti bahwa faktor perawatan berpengaruh dalam mengurangi jumlah orang yang terinfeksi (Nainggolan et al., 2023). Model penyebaran dengan kontrol akan dilakukan dengan penambahan faktor pengaruh *testing* dan perawatan. Kontrol *testing*  $u_1(t)$  terhadap individu *exposed* merupakan upaya pemetaan individu yang berpotensi terinfeksi sedangkan kontrol perawatan  $u_2(t)$  terhadap individu yang terinfeksi merupakan upaya untuk mengurangi jumlah individu terinfeksi, sehingga model penyebaran penyakit COVID-19 adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{ds}{dt} = \mu - (\alpha i + \mu + v)s \\ \dot{e} &= \frac{de}{dt} = \alpha is - (\beta + \mu + u_1)e \\ \dot{i} &= \frac{di}{dt} = (\beta + u_1)e - (\mu_{in} + \delta + \mu + u_2)i \\ \dot{r} &= \frac{dr}{dt} = (\delta + u_2)i + vs - \mu r \end{aligned} \tag{2}$$

dengan kondisi awal  $s(0), e(0), i(0), r(0) \geq 0$ .

Fungsi kontrol  $u_1(t)$  dan  $u_2(t)$  diasumsikan terbatas dan merupakan fungsi terintegrasi Lebesgue. Suatu fungsi dikatakan terintegrasi Lebesgue jika nilai integralnya terdefinisi dalam himpunan bilangan real atau didefinisikan dalam himpunan berikut (Royden, 1968):

$$U = \{u_1(t), u_2(t) | 0 \leq u_1(t) \leq u_{1max}, 0 \leq u_2(t) \leq u_{2max}\}$$

Fungsi kontrol  $u_1(t)$  terdefinisi pada interval  $[0,1]$ . Nilai  $u_1(t) = 0$  menunjukkan bahwa pelaksanaan *testing* tidak berefek terhadap jumlah populasi yang rentan terinfeksi, sehingga populasi *susceptible* lebih mudah terinfeksi. Sebaliknya nilai  $u_1(t) = 1$  menunjukkan bahwa pelaksanaan *testing* terhadap populasi *exposed* telah maksimal. Hal tersebut juga berlaku pada fungsi kontrol  $u_2(t)$  yang terdefinisi pada interval  $[0,1]$ . Nilai  $u_2(t) = 0$  menunjukkan bahwa perawatan terhadap individu terinfeksi tidak berefek terhadap jumlah individu sembuh, sehingga populasi *infected* sulit untuk sembuh. Sebaliknya nilai  $u_2(t) = 1$  menunjukkan bahwa pelaksanaan perawatan terhadap populasi *infected* telah maksimal. Hal ini mengakibatkan diperlukan bentuk  $u_1(t)$  dan  $u_2(t)$  yang optimal yaitu  $u_1^*(t)$  dan  $u_2^*(t)$ , sehingga pelaksanaan kontrol dapat maksimal dengan biaya minimum.

Berdasarkan tujuan suatu kontrol optimal, dimodelkan suatu fungsi tujuan (fungsi objektif) yang menyatakan banyaknya individu *exposed*, individu *infected*, variabel kontrol *testing*, variabel kontrol perawatan serta biaya untuk pelaksanaan kontrol. Hubungan antara biaya yang dikeluarkan untuk kedua kontrol dengan banyaknya individu pada masing-masing populasi adalah tidak linear, sehingga fungsi biaya dibentuk ke dalam model nonlinear dan fungsi kuadrat ( $u_i^2(t)$ ). Fungsi tujuan dirumuskan sebagai berikut:

$$J(u_1, u_2) = \int_0^T \left[ a_1 e + a_2 i + \frac{1}{2} (b_1 u_1^2 + b_2 u_2^2) \right] dt \tag{3}$$

yang bergantung pada sistem persamaan (3). Pada fungsi tujuan di atas,  $a_i$  sebagai koefisien bobot atau penyeimbang dari populasi *exposed* dan *infected* seperti yang dinyatakan oleh Nasution dan Sinaga (2021),  $b_i$  adalah koefisien bobot yang berkorelasi dengan biaya dari strategi kontrol, dan nilai  $\frac{1}{2}$  menyatakan kepentingan biaya yang berkaitan dengan strategi kontrol adalah sama seperti yang dinyatakan oleh Li & Guo (2022) dan Rangkuti et al. (2022).

Sistem kontrol optimal pada model ini dirumuskan sebagai upaya menemukan kontrol  $u_1^*(t)$  dan  $u_2^*(t)$  pada interval waktu  $t_0 \leq t \leq t_f$ , dengan waktu awal  $t_0 = 0$  dan waktu akhir  $t_f = T$ , sedemikian sehingga

$$J(u_1^*, u_2^*) = \min J(u_1, u_2) \tag{4}$$

Fungsi tujuan (4) merepresentasikan pencarian pasangan solusi kontrol  $u_1(t)$  dan  $u_2(t)$  yang dapat meminimumkan penyebaran penyakit COVID-19 atau dengan kata lain akan dicari  $(u_1^*, u_2^*) \in U$  sedemikian sehingga  $J(u_1^*, u_2^*) \leq J(u_1, u_2)$  untuk setiap  $(u_1, u_2) \in U$ .

### Kontrol Optimal Model Penyebaran COVID-19

Penyelesaian kontrol optimal model penyebaran COVID-19 menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin dengan tahapan yang dimulai dari membentuk fungsi Hamiltonian, menentukan persamaan *state* dan *costate*, serta memenuhi kondisi stasioner.

#### 1. Membentuk Fungsi Hamiltonian

$$\begin{aligned}
 H &= f(x(t), u(t), t) + \lambda(t)g(x(t), u(t), t) \\
 H &= a_1e + a_2i + \frac{b_1}{2}u_1^2 + \frac{b_2}{2}u_2^2 + \lambda_s(\mu - (\alpha i + \mu + v)s) \\
 &\quad + \lambda_e(\alpha is - (\beta + \mu + u_1)e) + \lambda_i((\beta + u_1)e - (\mu_{in} + \delta + \mu + u_2)i) \\
 &\quad + \lambda_r((\delta + u_2)i + vs - \mu r)
 \end{aligned} \tag{5}$$

2. Menentukan Persamaan *State* dan *Costate*

Persamaan *state* memenuhi kondisi berikut:

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \tag{6}$$

Persamaan *costate* memenuhi kondisi berikut:

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \tag{7}$$

3. Memenuhi Kondisi Stasioner

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = 0 \tag{8}$$

Karena fungsi kontrol terbatas pada  $0 \leq u_1^*(t) \leq u_{1max}$  dan  $0 \leq u_2^*(t) \leq u_{2max}$ , sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned}
 u_1^*(t) &= \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{e(\lambda_e - \lambda_i)}{b_1}, u_{1max} \right\} \right\} \\
 u_2^*(t) &= \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{i(\lambda_i - \lambda_r)}{b_2}, u_{2max} \right\} \right\}
 \end{aligned} \tag{9}$$

### Simulasi Numerik

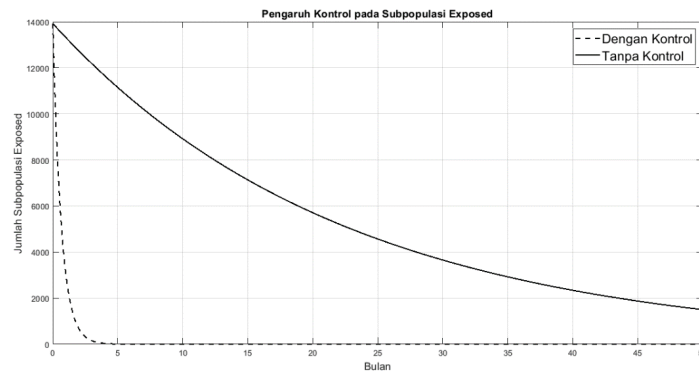
Simulasi numerik yang dilakukan pada penelitian ini menggunakan *software* MATLAB 2021a. Simulasi kontrol optimal dilakukan untuk menyelidiki pengaruh penerapan kontrol *testing* dan kontrol perawatan terhadap jumlah individu pada subpopulasi *susceptible*, *exposed*, *infected*, dan *recovered* selama 50 bulan. Nilai awal dan nilai parameter yang digunakan dalam simulasi numerik diberikan dalam tabel 1 berikut.

**Tabel 1. Nilai Awal dan Nilai Parameter Model SEIR COVID-19**

Variabel/Parameter	Nilai
<i>N</i>	87865 orang
<i>s</i>	37538 orang
<i>e</i>	13923 orang
<i>i</i>	23191 orang
<i>r</i>	13213 orang
$\alpha$	$0,62 \times 10^{-8}$ /orang/hari
$\delta$	$6,667 \times 10^{-4}$ /hari
$\mu$	$6,25 \times 10^{-3}$
$\mu_{in}$	$7,344 \times 10^{-7}$
<i>v</i>	0,75 (Asumsi)
$\beta$	0,38356 (Asumsi)

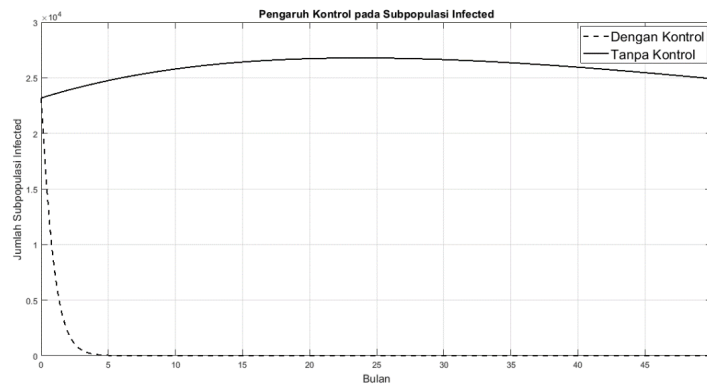
Sumber: data riset (Annas et al., 2020)

Berdasarkan hasil simulasi numerik, diperoleh grafik perubahan jumlah masing-masing subpopulasi sebagai berikut.



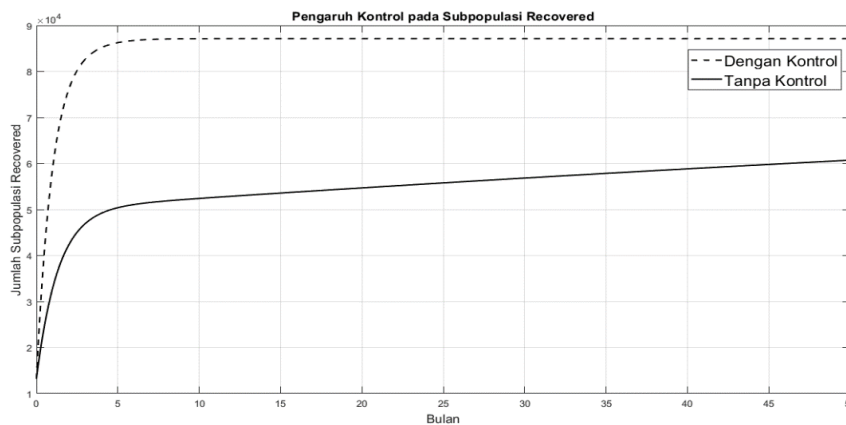
**Gambar 1.** Pengaruh Penerapan Kontrol pada Subpopulasi *Exposed* dengan  $v = 0.75$  dan  $\beta = 0.038356$

Berdasarkan Gambar 1, sejak awal hingga akhir selama 50 bulan periode simulasi, jumlah individu *exposed* pada sistem dengan kontrol mengalami penurunan lebih drastis dibandingkan dengan jumlah individu *exposed* pada sistem tanpa kontrol. Hasil pada akhir periode simulasi, jumlah individu *exposed* pada sistem dengan kontrol menurun 100% dibandingkan dengan sistem tanpa kontrol, sehingga penerapan kontrol berpengaruh signifikan pada jumlah individu *exposed*.



**Gambar 2.** Pengaruh Penerapan Kontrol pada Subpopulasi *Infected* dengan  $v = 0.75$  dan  $\beta = 0.038356$

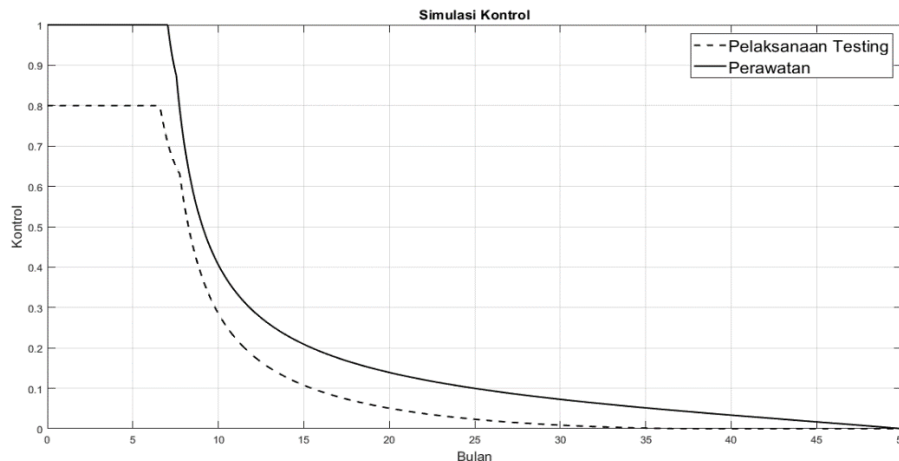
Gambar 2 menunjukkan selama 50 bulan periode simulasi, sejak awal hingga akhir jumlah individu *infected* pada sistem dengan kontrol mengalami penurunan lebih rendah dibandingkan dengan jumlah individu *infected* pada sistem tanpa kontrol. Akhir periode simulasi menunjukkan jumlah individu *infected* pada sistem dengan kontrol menurun 100% dibandingkan dengan sistem tanpa kontrol. Hal ini berarti penerapan kontrol berpengaruh signifikan pada jumlah individu *infected*.



**Gambar 3.** Pengaruh Penerapan Kontrol pada Subpopulasi *Recovered* dengan  $v = 0.75$  dan  $\beta = 0.038356$



Berdasarkan Gambar 3, pada 4 bulan pertama simulasi, jumlah individu *recovered* pada sistem dengan kontrol meningkat lebih tinggi kemudian stabil hingga masa akhir simulasi. Sedangkan pada jumlah populasi *recovered* pada sistem tanpa kontrol meningkat hingga bulan ke 50. Jumlah individu *recovered* pada sistem dengan kontrol lebih banyak 734 individu dibandingkan dengan sistem tanpa kontrol, sehingga penerapan kontrol berpengaruh pada jumlah individu *recovered*.



**Gambar 4. Simulasi Kontrol pada Model Penyebaran COVID-19 dengan  $v = 0.75$  dan  $\beta = 0.038356$**

Berdasarkan Gambar 4, simulasi penerapan kontrol dilakukan dengan batas  $0 \leq u_1^* \leq 0.8$  dan  $0 \leq u_2^* \leq 1$ . Efisiensi penggunaan  $u_1^*$  sebagai kontrol dalam sistem penyebaran COVID-19 hanya berpengaruh maksimal hingga 6,52 bulan pertama dan semakin menurun untuk waktu selanjutnya, sedangkan efisiensi penggunaan  $u_2^*$  sebagai kontrol dalam sistem penyebaran COVID-19 hanya berpengaruh maksimal hingga 7,04 bulan pertama dan semakin menurun untuk waktu selanjutnya. Penerapan kedua kontrol mampu mengurangi jumlah individu *exposed* dan *infected* masing-masing sebesar 99,9%. Hasil tersebut dapat diinterpretasikan bahwa dapat dilakukan penghematan biaya *testing* untuk individu *exposed* dan perawatan untuk individu *infected* hingga 99,9%.

Selanjutnya perbandingan jumlah individu masing-masing subpopulasi pada keadaan awal, sistem tanpa kontrol dan sistem dengan kontrol sebagai berikut.

**Tabel 2. Perbandingan Jumlah Individu pada Keadaan Awal, Sistem tanpa Kontrol dan Sistem dengan Kontrol untuk  $v = 0.75$  dan  $\beta = 0.038356$**

Variabel	Keadaan Awal	Tanpa Kontrol	↑↓ %	Dengan Kontrol	↑↓ %
<i>s</i>	37.538.000	726.008	↓ 98,1%	726.157	↓ 98,1%
<i>e</i>	13.923.000	1.499.820	↓ 89,2%	1	↓ 99,9%
<i>i</i>	23.191.000	24.920.300	↑ 7,5%	4	↓ 99,9%
<i>r</i>	13.213.000	60.718.100	↑ 359,5%	87.138.800	↑ 559,5%
Total Populasi	87.865.000	87.864.228	↓ 0%	87.864.962	↓ 0%

Sumber: Hasil riset olah data

Tabel 2 menunjukkan keadaan jumlah individu masing-masing subpopulasi pada keadaan awal ( $t = 0$ ), keadaan sistem tanpa kontrol ( $t = 50$ ) serta keadaan sistem dengan kontrol ( $t = 50$ ) dengan  $v = 0.75$  dan  $\beta = 0.038356$ . Jumlah individu *susceptible* pada keadaan awal sebesar 37.538.000 individu yang berkurang masing-masing sebesar 98,1% menjadi 726.008 individu pada sistem tanpa kontrol dan 726.157 individu pada sistem dengan kontrol setelah bulan ke-50. Jumlah individu *exposed* pada keadaan awal sebesar 13.923.000 individu yang berkurang sebesar 89,2% menjadi 1.499.820 individu pada sistem tanpa kontrol

dan berkurang sebesar 99,9% menjadi 1 individu pada sistem dengan kontrol setelah bulan ke-50. Jumlah individu *infected* pada keadaan awal sebesar 23.191.000 individu yang bertambah sebesar 7,5% menjadi 24.920.300 individu pada sistem tanpa kontrol dan berkurang sebesar 99,9% menjadi 4 individu pada sistem dengan kontrol setelah bulan ke-50. Jumlah individu *recovered* pada keadaan awal sebesar 13.213.000 individu yang bertambah sebesar 359,5% menjadi 60.718.100 individu pada sistem tanpa kontrol dan bertambah sebesar 559,5% menjadi 87.138.800 individu pada sistem dengan kontrol setelah bulan ke-50. Total populasi pada keadaan awal sebesar 87.865.000 individu yang berkurang sebesar 772 individu pada sistem tanpa kontrol dan 38 individu pada sistem dengan kontrol dengan persentase hamper 0%.

Perbandingan keadaan jumlah individu pada sistem tanpa kontrol dan jumlah individu pada sistem dengan kontrol setelah bulan ke-50 adalah sebagai berikut:

**Tabel 3. Perbandingan Jumlah pada Sistem tanpa Kontrol dan Sistem dengan Kontrol untuk  $v = 0.75$  dan  $\beta = 0.038356$**

Variabel	Tanpa Kontrol	Dengan Kontrol	↑↓ %
<i>s</i>	726.008	726.157	↓ 0%
<i>e</i>	1.499.820	1	↓ 99,9%
<i>i</i>	24.920.300	4	↓ 99,9%
<i>r</i>	60.718.100	87.138.800	↑ 43,5%
Total Populasi	87.864.228	87.864.962	↓ 0%

Sumber: Hasil riset olah data

Tabel 3 menunjukkan keadaan jumlah individu masing-masing subpopulasi pada sistem tanpa kontrol dan sistem dengan kontrol pada bulan ke-50 untuk  $v = 0.75$  dan  $\beta = 0.038356$ . Perbandingan tersebut menunjukkan tidak terdapat perbedaan yang signifikan jumlah individu *susceptible* pada sistem dengan kontrol dan sistem tanpa kontrol, namun terdapat penurunan signifikan pada subpopulasi *exposed* dan *infected* pada sistem dengan kontrol dibandingkan dengan sistem tanpa kontrol. Jumlah individu *exposed* dan *infected* masing-masing menurun sebesar 99,9%, sedangkan jumlah individu *recovered* mengalami kenaikan sebesar 43,5%. Total populasi pada bulan ke-50 sistem dengan kontrol lebih banyak 734 individu dibandingkan dengan sistem tanpa kontrol.

Perbedaan yang dapat dilihat pada keadaan sistem tanpa kontrol dan dengan kontrol terdapat pada jumlah individu pada masing-masing subpopulasi pada akhir masa simulasi. Sistem dengan kontrol mengakibatkan individu masih banyak berada dalam subpopulasi *exposed* dan *infected*, sedangkan sistem dengan kontrol mengakibatkan populasi cepat mengalami perpindahan dan berakhir menjadi subpopulasi *recovered*. Total populasi pada sistem dengan kontrol adalah 64.283.708 sedangkan pada sistem tanpa kontrol adalah 64.282.808. Jika dibandingkan dengan total populasi pada keadaan awal sebesar 87.865.000, penerapan kontrol bulan ke-50 mengalami penurunan sebesar 26,8%. Penerapan kontrol  $u_1^*$  dan  $u_2^*$  dapat menurunkan jumlah individu *infected* dan meningkatkan individu *recovered*, namun tidak dapat mempertahankan jumlah populasinya.

## KESIMPULAN

Berdasarkan uraian hasil dan pembahasan, maka dapat disimpulkan bahwa kontrol *testing* dan perawatan yang digunakan pada model SEIR penyebaran COVID-19 dapat meminimumkan fungsi tujuan dari sistem kontrol optimal diperoleh dengan menggunakan

$$Prinsip\ Maksimum\ Pontryagin,\ yaitu: u_1^*(t) = \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{e^{(\lambda_e - \lambda_i)}}{b_1}, u_{1max} \right\} \right\}$$

$$u_2^*(t) = \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{i(\lambda_i - \lambda_r)}{b_2}, u_{2max} \right\} \right\}$$

Simulasi numerik kontrol optimal dengan tiga nilai vaksinasi dan masa inkubasi yang berbeda menunjukkan bahwa penerapan kedua strategi kontrol pada model penyebaran

COVID-19 di Indonesia efektif dalam menurunkan jumlah individu yang terinfeksi hingga 99,9%.

Penelitian selanjutnya dapat melakukan analisis kontrol optimal menggunakan strategi kontrol selain *testing* dan perawatan dalam upaya meminimalkan penyebaran COVID-19. Penelitian ini juga dapat dikembangkan dengan menggunakan model SEIRS yang mempertimbangkan kemungkinan individu tidak memiliki kekebalan terhadap virus sehingga dapat terinfeksi kembali setelah sembuh.

## REFERENSI

- Annas, S., Isbar Pratama, M., Rifandi, M., Sanusi, W., & Side, S. (2020). Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia. *Chaos, Solitons and Fractals*, 139, 110072. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110072>
- Azzahra, N. F., Hariyanto, H., & Mardlijah, M. (2022). Kontrol Optimal Penyebaran COVID-19 Model SEIR di Jakarta. *Jurnal Sains Dan Seni ITS*, 11(2). <https://doi.org/10.12962/j23373520.v11i2.76998>
- Gu, Y., Ullah, S., Khan, M. A., Alshahrani, M. Y., Abohassan, M., & Riaz, M. B. (2022). Mathematical modeling and stability analysis of the COVID-19 with quarantine and isolation. *Results in Physics*, 34(February). <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2022.105284>
- Hou, C., Chen, J., Zhou, Y., Hua, L., Yuan, J., He, S., Guo, Y., Zhang, S., Jia, Q., Zhao, C., Zhang, J., Xu, G., & Jia, E. (2020). The effectiveness of quarantine of Wuhan city against the Corona Virus Disease 2019 (COVID-19): A well-mixed SEIR model analysis. *Journal of Medical Virology*, 92(7), 841–848. <https://doi.org/10.1002/jmv.25827>
- İğret Araz, S. (2021). Analysis of a Covid-19 model: Optimal control, stability and simulations. *Alexandria Engineering Journal*, 60(1), 647–658. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2020.09.058>
- Kompas. (2023). *Peningkatan Covid-19 di Akhir Tahun, 2 Pasien Meninggal, dan Pentingnya Vaksinasi*. KOMPAS.Com. <https://nasional.kompas.com/read/2023/12/27/09164351/peningkatan-covid-19-di-akhir-tahun-2-pasien-meninggal-dan-pentingnya?page=all>
- Li, T., & Guo, Y. (2022). Optimal control and cost-effectiveness analysis of a new COVID-19 model for Omicron strain. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 606, 128134. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2022.128134>
- Nainggolan, J., Harianto, J., & Tasman, H. (2023). an Optimal Control of Prevention and Treatment of Covid-19 Spread in Indonesia. *Communications in Mathematical Biology and Neuroscience*, 2023, 1–22. <https://doi.org/10.28919/cmbn/7820>
- Paul, A. K., & Kuddus, M. A. (2022). Mathematical analysis of a COVID-19 model with double dose vaccination in Bangladesh. *Results in Physics*, 35(February), 105392. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2022.105392>
- Rangkuti, Y. M., Firmansyah, & Landong, A. (2022). Control optimal analysis of SEIR model of covid 19 spread in Indonesia. *Journal of Physics: Conference Series*, 2193(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2193/1/012091>
- Royden, H. . (1968). *Real Analysis 2nd Edition*. McMillan Publishing Company Inc.
- WHO. (2023). *Statement on the Fifteenth Meeting of the IHR (2005) Emergency Committee on the COVID-19 Pandemic*. World Health Organization. <https://www.who.int/news/>
- Wikipedia. (n.d.). *Pandemi COVID-19 di Indonesia*. 2020. Retrieved June 15, 2023, from <https://id.wikipedia.org/>
- Yong, B., Hoseana, J., & Owen, L. (2022). From pandemic to a new normal: Strategies to optimise governmental interventions in Indonesia based on an SVEIQRH-type mathematical model. *Infectious Disease Modelling*, 7(3), 346–363. <https://doi.org/10.1016/j.idm.2022.06.004>
- Youssef, H. M., Alghamdi, N., Ezzat, M. A., El-Bary, A. A., & Shawky, A. M. (2022). A

proposed modified SEIQR epidemic model to analyze the COVID-19 spreading in Saudi Arabia. *Alexandria Engineering Journal*, 61(3), 2456–2470. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2021.06.095>

Zeb, A., Alzahrani, E., Erturk, V. S., & Zaman, G. (2020). Mathematical Model for Coronavirus Disease 2019 (COVID-19) Containing Isolation Class. *BioMed Research International*, 2020. <https://doi.org/10.1155/2020/3452402>